ریاضی کا نقشہ
قدیر قریشی
جولائی 06، 2017

ہم نے سکول میں جو ریاضی سیکھی تھی وہ ابتدائی درجے کی تھی اور اس سے ریاضی کی گہری سمجھ ممکن نہیں ہے کیونکہ سکول میں ہمیں ریاضی سے متعلق محض سطحی باتیں بتائی جاتی ہیں جبکہ ریاضی ایک بہت گہرا اور وسیع مضمون ہے – اس ویڈیو کا مقصد ریاضی کی شان دکھانا ہے – اس کے لیے ہم شروع ریاضی کے آغاز سے کرتے ہیں –

ریاضی کا آغاز گندتی سے ہوا – گنتی صرف انسانوں کو ہی نہیں آتی – بہت سے جانور بھی کسی حد تک گننے کی صلاحیت رکھتے ہیں – قبل از تاریخ زمانے میں بھی انسان گنتی کے قابل تھے – اس کا ثبوت ہڈیوں پر لگائے گئے نشانات ہیں – اس سلسلے میں بہت سے معاشروں میں کام کیا گیا – قدیم مصری تہذیب میں مساوات یعنی equation کا تصور موجود تھا – قدیم یونانی تہذیب نے بھی ابتدائی ریاضی میں بہت سے نئے تصورات ایجاد کیے جن میں جیومیٹری اور نمبرولوجی شامل ہیں – منفی اعداد کا تصور چین میں ایجاد ہوا – صفر سب سے پہلے قدیم ہندوستانی تہذیب نے استعمال کیا – اس کے بعد اسلام کا سنہرا دور شروع ہوا جس میں ایرانی ریاضی دانوں نے الجبرا کی پہلی کتاب لکھی – اس کے بعد نشاۃِ ثانیہ کے دور میں سائنس کی عمومی ترقی کے ساتھ ساتھ ریاضی نے بھی دن دوگنی رات چوگنی ترقی کی

اگرچہ ریاضی کا ماضی بے حد شاندار ہے لیکن ہم ماضی کو چھوڑ کر صرف جدید ریاضی پر ہی اپنی توجہ مرکوز کرتے ہیں – جدید ریاضی کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے – ایک تو خالص ریاضی یعنی pure mathematics ہے جس میں ریاضی کو صرف ریاضی ہی کے لیے سٹڈی کیا جاتا ہے – اور دوسرا حصہ عملی ریاضی یعنی applied mathematics ہے جسے دنیا کے سائنسی اور بہت سے غیر سائنسی مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے – لیکن ان دونوں میں بہت سی خصوصیات مشترک ہیں – تاریخ میں یہ کئی بار ہوچکا ہے کہ کسی ماہر نے ریاضی کی سٹڈی صرف اس لیے کی کہ اسے ریاضی بہت پسند تھی اور اسے ریاضی کے تصورات میں ایک آفاقی خوبصورتی نظر آتی تھی – ایسے لوگوں نے ریاضی کی نئی شاخیں ایجاد کیں جو کہ بذاتِ خود بہت دلچسپ تھیں لیکن ان کا کوئی عملی استعمال کسی کے ذہن میں نہیں تھا – لیکن سو ڈیڑھ سو سال بعد فزکس یا کمپیوٹر کے بہت پیچیدہ مسائل کو حل کرنے کے لیے ریاضی کے وہ اصول استعمال ہونے لگے جنہیں ایک صدی تک محض خالص ریاضی ہی سمجھا جاتا تھا – دیکھا جائے تو یہ امر باعث حیرت ہے کہ کوئی چیز اپنی ایجاد کے سو سال بعد استعمال ہونے لگے اور اس طرح استعمال ہونے لگے گویا وہ ایجاد ہی اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے کی گئی تھی – ایسا صرف ایک یا دو دفعہ نہیں بلکہ پچھلی چند صدیوں میں بار بار ہوتا آیا ہے –

یہ بات انتہائی دلچسپ ہے کہ خالص ریاضی جو کہ ایک انتہائی تجریدی یعنی abstract چیز ہے پیچیدہ سائنسی مسائل کو حل کرنے میں اس درجہ تک کامیاب ہوجاتی ہے کہ اس کے بغیر سائنس کی ترقی ممکن ہی نہیں نظر آتی – لیکن ساتھ ہی ساتھ یہ بھی درست ہے کہ خالص ریاضی بذاتِ خود بھی انتہائی اہم ہے کیونکہ ریاضی کی مساوات خود سے بھی خوبصورتی پیدا کرنے کی اہل ہیں – ایسی خوبصورتی جو آرٹ کہلانے کی مستحق ہے –

تو چلیے ہم ریاضی کی طرف واپس چلتے ہیں – خالص ریاضی کے بہت سے حصے ہیں – ریاضی میں اعداد کی سٹڈی کا آغاز فطری اعداد یعنی natural numbers سے ہوتا ہے یعنی آپ ان اعداد کو ریاضی کے مختلف اعمال یا operations کی مدد سے کیا کچھ کر سکتے ہیں – اس کے بعد آتے ہیں سالم اعداد یعنی integers جن میں مثبت اور منفی اعداد شامل ہوتے ہیں، کسری اعداد یعنی rational numbers، حقیقی اعدا یا real numbers مثلاً پائی جن میں نقطہِ اعشاریہ کے بعد لامنتہا اعداد ہو سکتے ہیں – اس کے علاوہ کامپلیکس اعداد اور بہت سے دوسری قسم کے اعداد بھی ریاضی کا حصہ ہیں – کچھ اعداد مخصوص خصوصیات کے حامل ہوتے ہیں مثلاً مفرد اعداد یا prime numbers، Pi، یا exponential اعداد –

اس قسم کے اعداد کی کچھ خصوصیات بھی ہوتی ہیں – مثال کے طور پر سالم اعداد اور حقیقی اعداد دونوں لامنتہا یعنی infinite ہیں – لیکن یہ بات بھی درست ہے کہ حقیق اعداد سالم اعداد سے کہیں زیادہ ہیں – چنانچہ کچھ انفینیٹیز دوسری انفینیٹز سے بڑی ہوتی ہیں -

جب ہم ان اعداد کو مساوات میں ظاہر کرتے ہیں تو ہم سٹرکچرز کی سٹڈی کر رہے ہوتے ہیں – ان مساوات کو کس طرح حل کیا جا سکتا ہے اس کے اصول الجبرا میں طے کیے جاتے ہیں – الجبرا میں مساوات کے علاوہ ویکٹرز اور matrices بھی ہوتے ہیں جو کہ کثیر جہتی یعنی multidimensional ہوسکتے ہیں – انہیں حل کرنے کے قوانین linear algebra میں سیکھے جاتے ہیں – اعداد کی خصوصیات کو سمجھنے کے لیے نمبر تھیوری استعمال ہوتی ہے جس میں حقیقی اعداد اور مفرد اعداد جیسے تصورات پر بحث کی جاتی ہے

گراف اور درخت یعنی tree کی قسم کے سٹرکچرز کی سٹڈی combinatorics کہلاتی ہیں جس میں ایسے سٹرکچرز پر بحث ہوتی ہے جو گنے جاسکتے ہوں – گروپ تھیوری میں ایسی چیزوں پر بحث ہوتی ہے جو ایک دوسرے سے منسلک ہوں – مثال کے طور پر روبک کیوب کا تعلق permutation group سے ہے – اعداد کو کیسے ترتیب دی جائے اس پر سٹڈی آرڈر تھیوری میں کی جاتی ہے – اس کی ایک مثال فطری اعداد ہیں جو ایسے اعداد کا سیٹ ہیں جن میں ایک خاص ترتیب پائی جاتی ہے لیکن اصولاً کسی بھی ایسے اعداد کو ایک ترتیب دیی جاسکتی ہے جن میں سے ہر دو کا آپس میں کوئی تعلق ہو –

خالص ریاضی کی ایک اور شاخ وہ ہے جس میں شکلوں یعنی shapes پر بحث کی جاتی ہے – اس کی ایک قسم جیومیٹری ہے جس میں فیثا غورث کا مسئلہ اور ٹریگنومیٹری بھی شامل ہے جسے آپ سکول میں پڑھ چکے ہیں – اسی کی ایک بہت دلچسپ شاخ fractal geometry ہے جس میں ایسے ریاضیاتی پیٹرنز کو سٹڈی کیا جاتا ہے جن کو چھوٹا یا بڑا کر دیں تو ان کے پیٹرن میں کوئی فرق نہیں پڑتا – ایسے پیٹرنز پر آپ خواہ کتنا ہی زوم کریں ان کی شکل وہی کی وہی رہتی ہے – topology سپیس کی ایسی خصوصیات کی سٹڈی کا نام ہے جن کے نتیجے میں سپیس کو بگاڑا جاسکتا ہو – مثال کے طور پر Mobius strip کی سطح مسلسل ہوتی ہے جس سے مختلف شکلیں بنتی ہیں لیکن اس سطح میں کوئی discontinuity نہیں ہوتی – کافی کپ اور donut میں بھی یہی خصوصیت ہوتی ہے –

Measure theory میں اعداد اور سپیس کو ملا کر ان کی مقدار کا تعین کیا جاتا ہے – differential geometry میں خمیدہ سطحوں اور شکلوں کی خصوصیات کو سٹڈی کیا جاتا ہے – مثال کے طور پر خمیدہ سطح پر کسی تکون کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180 درجے نہیں ہوتا –

اب ہم بات کرتے ہیں تبدیلی کی پیمائش کی – تبدیلی کی پیمائش میں کیلکولس استعمال ہوتا ہے جس میں differential اور integral کو استعمال کر کے کسی فنکشن کا رقبہ یا اس کا gradient یعنی تبدیلی کی رفتار کو معلوم کیا جاتا ہے – انہی چیزوں کی پیمائش اگر ویکٹرز کے لیے کرنی ہو تو ویکٹر کیلکولس استعمال ہوگا – dynamical systems میں ایسے سسٹم پر توجہ دی جاتی ہے جن کی حالت وقت سے ساتھ تبدیل ہورہی ہو مثلاً مائع کا بہاؤ یا ایسے سسٹم جن میں feedback ہو مثلاً ماحولیاتی سسٹمز – Chaos theory ان ڈائنیمکل سسٹمز کو سٹڈی کرتی ہے جو اپنی initial conditions میں معمولی سی تبدیلی سے بہت مختلف طور پر ارتقاء پذیر ہوسکتے ہیں – complex analysis ان فنکشنز پر بحث کرتا ہے جن میں complex numbers استعمال ہوتے ہیں

اب ہم آتے ہیں عملی ریاضی یعنی applied mathematics کی طرف – یہاں یہ کہنا ضروری ہے کہ ریاضی میں تمام شعبے آپس میں ایک دوسرے سے بہت گہرا تعلق رکھتے ہیں – چنانچہ یہ نقشہ مکڑی کے جالے کی طرح نظر آنا چاہیے جس میں ہر چیز ہر دوسری چیز سے منسلک ہو لیکن ایسا کرنے سے اس خاکے کو سمجھنا ناممکن ہوجائے گا اس لیے ہم نے اس گرافک کو سادہ رکھنے کی کوشش کی ہے – تو ہم اس بحث کا آغاز فزکس سے کرتے ہیں جس میں ریاضی کی وہ تمام شاخیں استعمال ہوتی ہیں جن کا ابھی ذکر کیا گیا – ریاضیاتی اور تھیوریٹیکل فزکس کا خالص ریاضی کے ساتھ بہت گہرا تعلق ہے – فزکس کے علاوہ ریاضیاتی کیمسٹری اور biomathematics میں بھی ریاضی بہت زیادہ استعمال ہوتی ہے – سائنس کے ان شعبوں میں ریاضی کو مالیکیولز کے ماڈلز بنانے سے لے کر ارتقائی حیاتیات یعنی evolutionary biology کے ماڈلز بنانے تک ہر چیز میں استعمال کیا جاتا ہے – انجینیئرنگ میں بھی ریاضی کا استعمال بہت زیادہ ہوتا ہے اور یہ مصری اور بابل کی تہذیب کے عہد سے آج تک ہوتا آ رہا ہے –

انتہائی پیچیدہ الیکٹریکل سسٹمز جو کہ ہوائی جہاز میں یا پاور گرڈ میں ہوتے ہیں Dynamical systems کی ایک شاخ کو استعمال کرتے ہیں جسے کنٹرول تھیوری کہا جاتا ہے – اگر ریاضی کی مساوات بہت زیادہ پیچیدہ ہوجائیں اور حل نہ ہوسکیں تو ریاضی کی مساوات کی جگہ numerical analysis کی تکنیک استعمال کی جاتی ہے – اس میں مساوات کا درست حل جاننے کے بجائے approximations استعمال کی جاتی ہیں جن سے قریب قریب درست جواب میسر آجاتا ہے – مثال کے طور پر اگر آپ ایک مربع کے اندر ایک دائرہ بنائیں جو مربع کی چاروں اطراف کو چھو رہا ہو، پھر اس پر بہت سی ڈارٹس پھینکیں اور پھر یہ گنیں کہ ان میں سے کتنی ڈارٹس دائرے کے اندر ہیں اور کتنی مربع میں لیکن دائرے سے باہر ہیں تو ان دو اعداد کے تناسب سے جو مقدار معلوم ہوگی وہ Pi کے قریب ہوگی – لیکن عام طور پر numerical analysis ڈارٹس پھینک کر نہیں بلکہ سپر کمپیوٹرز کی مدد سے کی جاتی ہے –

گیم تھیوری میں اس بات کا تجزیہ کیا جاتا ہے کہ اگر کسی مسئلے پر کچھ انسان مل کر چند قوانین کے تحت کچھ فیصلہ کر رہے ہوں تو منطقی افراد کے لیے کون کون سے آپشنز بہترین ہوں گے – اسے بہت پیچیدہ معاشیاتی مسائل کے تجزیہ میں استعمال کیا جاتا ہے جن میں لوگ عمومی طور پر منطقی سوچ رکھتے ہیں لیکن کبھی کبھی جذباتی فیصلے بھی کر بیٹھتے ہیں – اس کے علاوہ گیم تھیوری کو نفسیات اور حیاتیات میں بھی استعمال کیا جاتا ہے –

امکانیات یا probability میں اتفاقی واقعات کے امکانات کا تجزیہ کیا جاتا ہے – مثال کے طور پر سکے اچھالنے، پانسہ پھینکنے یا کوانٹم فزکس کی پیش گوئیاں اتفاقی واقعات ہوتے ہیں کیونکہ ان میں نتیجے کی حتمی پیش گوئی ممکن نہیں ہوتی لیکن کسی بھی نتیجے کے امکان کے بارے میں پیش گوئی کی جاسکتی ہے – شماریات یا statistics میں اتفاقی واقعات سے متعلق ڈیٹا کا تجزیہ کیا جاتا ہے – اس کا ایک استعمال mathematical finance میں ہوتا ہے جہاں financial systems کے ماڈلز بنا کر ان کا شماریاتی تجزیہ کیا جاتا ہے تاکہ بہتر نتائج کی پیش گوئی کر کے زیادہ پیسہ کمایا جاسکے – اس سے ملتا جلتا ایک اور شعبہ optimization ہے جس میں پیچیدہ سسٹمز سے بہترین نتائج نکالنے کے لیے آپشنز چنی جاتی ہیں – آپ اسے یوں سمجھ سکتے ہیں کہ اس میں ایک پیچیدہ فنکشن کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم value کا اندازہ لگایا جاتا ہے – انسان فطری طور پر ہر حالت میں optimization کی ہی تلاش میں ہوتا ہے تاکہ اپنی رقم پر بہترین منافع کما سکے، مال سستے سے سستا خریدے اور مہنگے سے مہنگا بیچے یا آپسی تعلقات کو بہتر سے بہتر بنا سکے –

ریاضی کی ایک اور بہت بڑی شاخ کمپیوٹر سائنس ہے جس کے تمام اصول کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے ہی خالص ریاضی سے وضع کر لیے گئے تھے – یہ اس بات کی ایک اور مثال ہے کہ ریاضی کی ایک شاخ نے اس وقت بہت ترقی کی جب ماہرین کو یہ علم بھی نہیں تھا کہ یہ اصول کب اور کیسے لاگو کیے جائیں گے – کمپیوٹر سائنس کی سب سے زیادہ ترقی پانے والی شاخ مشین learning ہے جس میں linear الجبرا، optimization، dynamical systems اور probability ڈھیروں کے حساب سے استعمال ہوتی ہے – اس کے علاوہ کمپیوٹر سائنس کی ایک اور بہت اہم شاخ cryptography ہے جس میں خالص ریاضی کے نظریات مثلاً combinatorics اور نمبر تھیوری استعمال ہوتے ہیں جن کی مدد سے ڈیٹا کو محفوظ بنایا جاتا ہے

تو یہ خالص ریاضی اور عملی ریاضی کا ایک مختصر سا خاکہ ہے – لیکن آخر میں ہم ریاضی کی بنیادوں پر بھی ایک طائرانہ نظر ڈالتے ہیں – اس میں ماہرین ریاضی کی بنیادی خصوصیات طے کرتے ہیں اور یہ فیصلہ کرتے ہیں کہ ریاضی کے بنیادی قوانین کیا ہیں اور وہ قوانین کیوں درست ہیں – کیا کچھ ایسے آفاقی بنیادی قوانین یا axioms ہیں جن سے تمام ریاضی اخذ کی جاسکتی ہے؟ کیا یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ تمام قوانین آپس میں ہم آہنگ ہیں؟ ریاضیاتی منطق یا mathematical logic، سیٹ تھیوری اور کیٹیگری تھیوری سے ان سوالات کے جوابات تلاش کرنے کی کوشش کی جاتی ہے – ریاضیاتی منطق میں سب سے مشہور نتیجہ گوڈیل کے incompleteness theorems ہیں جن سے اکثر لوگ یہ غلط نتیجہ نکالتے ہیں کہ ریاضی ایک مکمل طور پر ہم آہنگ علم نہیں ہے اور یہ انسانوں نے اپنی سوچ سے ایجاد کیا ہے – لیکن اگر ہم اس بات پر غور کریں کہ ریاضی نے کائنات کے کتنے سربستہ راز کھول دیے ہیں تو معلوم ہوتا ہے کہ ریاضی میں کچھ گہری سچائی ضرور ہے – ورنہ محض انسانی ذہن کی ایجاد فطرت کے راز افشاں کرنے میں اتنی کامیاب نہ رہتی – یہ بذاتِ خود ایک بہت گہرا اور پراسرار راز ہے کہ ریاضی کائنات کو سمجھنے میں اتنی مددگار کیونکر ثابت ہوسکتی ہے –

اس کے علاوہ theory of computation میں کمپیوٹرکیلکولیشنز کے مختلف ماڈلز کو سٹڈی کیا جاتا ہے اور یہ معلوم کیا جاتا ہے کہ کسی بھی پرابلم کا حل کتنا پیچیدہ ہوسکتا ہے اور اسے بہترین طریقے سے حل کرنے کے لیے کمپیوٹرز کے الگوردمز کیسے ڈیزائین کیے جانے چاہییں – اس میں complexity theory بھی شامل ہے جس میں اس بات کا اندازہ لگایا جاتا ہے کہ کس پرابلم کا حل اصولاً بھی ممکن نہیں ہے اور جن پرابلمز کا حل ممکن ہے انہیں حل کرنے کے لیے کس قدر میموری اور وقت درکار ہوگا – زیادہ تر ایسے پرابلمز جن کا حل اصولاً ممکن ہے لیکن جو ابھی تک حل نہیں ہو پائیں ہمیں بہت زیادہ میموری اور بہت زیادہ وقت درکار ہوتا ہے –

تو یہ ہے ریاضی کا پورا نقشہ – ریاضی سیکھنے اور اس کی پریکٹس میں ہمیں ایک گونہ اطمینان محسوس ہوتا ہے کہ وہ پیچیدہ اصول جو کبھی ہمیں لاینحل معلوم ہوتے تھے اب ہماری دسترس میں ہیں اور مشق کے بعد ہمیں ریاضی کے وہی مسائل آسان معلوم ہوتے ہیں جو شروع میں ناقابلِ یقین حد تک مشکل محسوس ہوتے تھے -

مزید ویڈیوز دیکھنے کے لیے وزٹ کیجیے ہمارا یوٹیوب چینل https://www.youtube.com/sciencekidunya

ویڈیو لنک
https://www.youtube.com/watch?v=OmJ-4B-mS-Y